行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

內生重整匯率目標區下之外匯及言衍生性商品選擇權的評價

Valuing Foreign Exchange Rate Derivatives under Endogenous Realignments for the Target Zones

† 八十六年度及以前的一般國科會專題計畫(不含產學合作研究計畫)亦可選擇適用，惟較特殊的計畫如國科會規劃案等，請先洽得國科會各學術處同意。

計畫編號：**NSC88-2416-H032-004**
執行期限：87 年 8 月 1 日至 88 年 7 月 31 日
主持人：賴 錦 璋　執行機構　淡江大學國貿系

一、中文摘要

實施匯率目標區由於具有密月效果，因此匯率動態調整途徑異於匯率完全浮動下的動態調整過程。因此本文擬以 Krugman 架構重新訂定歐式外匯選擇權的評價。由於傳統外匯選擇權評價都假設利率是外生的隨機變數，但是為避免無風險套利的行為，本文假設利率平價說成立，因此利率將與人民對未來匯率預期的變動息息相關。

關鍵詞：匯率目標區，歐式選擇權、利率平價說

Abstract

Recent research demonstrates that a policy restricting the movements of fundamental driving variables to a well-defined band may temper the response of the exchange rate to fundamentals.Thus, lognormal distribution is probably a poor approximation for the exchange rates which are kept with some ranges set by central bank. Therefore, this paper will take advantage of Krugman Model to value options and other derivate contracts.

Keywords:Target Zones, European Currency Options，IRP

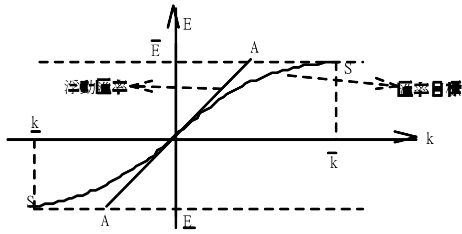
二、緣由與目的

外匯選擇權（options）的定價與匯率的波動有極為密切的關連，在 1970 年代浮動匯率盛行時期，如果我們假設匯率(S)的波動服從下列的隨機過程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dw，$$

其中 w 為標準的 Wiener Process。那麼我們可以用 lognormal 分配來刻劃匯率的風險，因此 Black-Scholes 模型提供我們一個良好選擇權的評價模式。

但是就實際運作上，大多數國家的匯率機制(Exchange Rate Mechanism)不能屬於「完全」的浮動匯率，以歐洲的匯率機制而言，要求各個會員國的貨幣必須與歐元(European Currency Unit)保持在一定的範圍內波動（早期大約是±2.4%,目前已經擴大到±15%）。如果匯率的調整只能允許在「上下限」內波動（學者稱之為匯率目標區，Target Zones），顯然匯率目標區下之匯率波動的風險要低於浮動匯率，在國際金融上稱之為密月效果(Honeymoon Effect,)，如圖一所示



[圖一]　S 型匯率函數

圖一橫軸表示隨機干擾項(k)，縱軸表示匯率(E)，而 AA 線表示浮動匯率受到隨機干擾波動的反應曲線（其斜率為一），而 SS 線為中央銀行宣佈匯率目標區為 $u\underline{E}\ u\overline{E}\ u$時的反應曲線（Krugman,1991），其斜率小於一意味著當經濟體系如果受到使本國貶值的隨機干擾時，在浮動匯率體

系下會「100%」的反應，但是在匯率目標區體系下，其相同程度的隨機干擾只會使本國匯率小幅的貶值，此效果稱之為密月效果。如果密月效果成立，則傳統 BS 模型以 lognormal 分配假設所得的評價模式顯然高估匯率的風險，因此 J.E. Ingersoll.JR(1997)配合匯率目標區的匯率機制，重新修訂外匯及其衍生性商品選擇權的評價模式。

但是 Ingersoll.JR(1997)所考慮的外匯評價模式顯然並沒有考慮密月效果，其所設定的匯率波動方程式是限制匯率只能在[a,b]之間波動，雖然限制匯率在[a,b]間波動可以降低匯率波動的風險，可是限制匯率在[a,b]間波動並沒有真正反應目標區的經濟效果。由於選擇權的到期日時間通常短於匯率波動到上下限（即 a,b）的時間(hitting time)，因此絕大部份匯率是在目標區內波動，此時匯率波動風險變小完全是由於密月效果的存在。

另外，為避免無風險套利行為，Ingersoll.JR(1997)同時假設匯率波動「不可接近邊界 inaccessible barriers」（亦即假設匯率不可能觸及目標區的上下限）及固定利率。可是即使匯率波動行為方程式如 Ingersoll.JR(1997)所假設，但在目標區內如果不滿足利率平價說，一樣會發生無風險的套利行為。因此 Ingersoll.JR(1997)假設目標區是不可接近（inaccessible）無法排除無風險的套利行。因此在考慮外匯評價時，利率不可能是獨立的。因此本文以 Krugman 模型為架構，探討歐式外匯選擇權的定價。

三、結果與討論

A.模型

依照 Garman 及 Kohlhagen (1983)年對外匯選擇權的假設

1.外匯選擇權市場為一無摩擦市場，即沒有稅賦、交易成本並可連續交易。

2.投資者持有無風險的對沖外幣的資產組合。

令本國匯率動態調整方程式為（Krugman, 1991）

$$s = k + \lambda \frac{E(ds)}{dt} \qquad (1)$$

其中 s 表示本國的對數匯率值(即 $s = \ln S$，S 表示名目匯率)，k 表示市場機要(market fundamental)，假設 k 為隨機過程並滿足

$$dk = \sigma dw$$

其中 w 為標準布朗運動(Wiener Process)。

令 $s = g(k)$，依照 $It\hat{o}$ 定理，$ds = g'dk + \frac{g''}{2}(dk)^2 = \frac{g''\sigma^2}{2}dt + g'\sigma dw$，則滿足(1)式的匯率動態方程式的通解為

$$\frac{\lambda\sigma^2}{2} g'' - g = 0 \text{。}$$

因此

$$g = k + Ae^{\alpha k} + Be^{-\alpha k} \text{。}$$

如果央行宣佈上下限為$(\overline{E}, \underline{E})$並且選擇適當的單位使得 $\overline{E} = -\underline{E}$，則 A=-B。利用連續平滑條件可以求出 $\overline{k}, \underline{k}$ 及 A 如圖一所示（Krugman 1991），其中 $A = -\frac{1}{\alpha e^{\alpha\overline{k}} + \alpha e^{-\alpha\underline{k}}} < 0$，$g' > 0, g'' < 0$。

由於 $s = \ln S$，因此名目匯率的動態調整方程式為

$$\frac{dS}{S} = \left(\frac{g''\sigma^2}{2} + \frac{g'^2\sigma^2}{2}\right)dt + g'\sigma dw \equiv \nu_1(S)dt + \sigma_1(S)dw \qquad (2)$$

雖然市場機要是無趨勢的飄移，可是在匯率目標區下持有外匯仍然存在報酬率$\left(\frac{g''\sigma^2}{2} + \frac{g'^2\sigma^2}{2}\right)$，因為當匯率趨向邊界時($\overline{E}$)，匯率升值機率大於持續貶值的機率，因此創造出獲利的空間。當市場機要碰到目標區的上界時，根據市場的平滑條件，

$g'=0$，因此(2)式顯示$\frac{dS}{S}=\frac{g''\sigma^2}{2}<0$，亦即匯率只有升值的可能。

另外為避免無風險套利行為，利率平價說必須成立，即$r-r^*=\frac{E(ds)}{dt}$，由於$\frac{E(ds)}{dt}=\frac{1}{\lambda}(s-k)=\frac{1}{\lambda}(g(k)-k)$，因此為避免無風險的套利行為，利率亦為隨機調整方程式，

$$dr=\frac{1}{\lambda}[\frac{\sigma^2 g''}{2}dt+(g'-1)\sigma dw]\equiv v_2(r)dt+\sigma_2(r)dw \qquad (3)$$

B.外匯歐式選擇權的定價

令$q(r.t)$代表市場風險的價格(market price of risk)，$B(r,t,T)$表示在T時間將支付1元的即期(t)折現債卷價格，則滿足(3)式折現債卷價格的偏微分方程式為[1]

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial B^2}{\partial r^2}+(v_2+\sigma q)\frac{\partial B}{\partial r}+\frac{\partial B}{\partial t}-rB=0 \qquad (4)$$

假設(4)式的解存在，則

$B(r,t,T)=A(t,T)e^{-\beta(t,T)r}$

為了滿足 Merton(1973)在隨機利率下歐式選擇權定價公式，必須對(2)式做適當的轉換。由於$v_1(S)$及$\sigma_1(S)$並不是常數，因此必須轉換$v_1(S)$及$\sigma_1(S)$成常數(Schuss 1980)。假設存在一函數$f,e=f(S)$使得$\frac{de}{e}=mdt+ndw$　m,n為常數。根據$It\hat{o}$定理,

$$m=\frac{Sf'v_1+f''S^2\sigma_1^2/2}{f},$$

$$n=\frac{Sf'\sigma_1}{f}$$

令執行價格為K，到期日為π，即期匯率為S，則 Merton(1973)歐式選擇權定價H滿足下列方程

$$H=KP(\pi)y(x,T)$$

$$y(x,T)=\frac{1}{2}[x\times erfc(h_1)-erfc(h_2)]$$

$$x=\frac{f(S)}{kP(\pi)}$$

$$h_1=-\frac{\ln(x)+T/2}{\sqrt{2T}}$$

$$h_2=-\frac{\ln(x)-T/2}{\sqrt{2T}}$$

$$erfc(h)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^h e^{-w^2}dw$$

$$T=\int_0^\pi[n^2+\delta^2-2\delta n^2]ds$$

$$\delta=\sigma_2 B(\pi)$$

[1] 請參閱 Malliaris and Brock(1982)

四、計畫成果自評

雖然我們同時考慮目標區及利率平價說導出外匯選擇權的平價，但是由於目標區所產生重整的風險在金融風暴期間顯然非常的高，因此如何將此風險納入選擇權的平價相當的重要。

五、參考文獻

Garman, Mark B., and Steven W. Kohlhagen, "Foreign Currency Option Values," Journal of International Money and Finance 2, No. 3, 1983, 229-263

Ingersoll, J. JR., “Valuing Foreign Exchange Derivatives with a Bounded Exchange Process” Review of Derivatives Research; Vol.1 ,1997, 159-181

Krugman, Paul (1991) “Target zones and exchange rate dynamics” Quarterly Journal of Economics; CVI(3), August 1991, 669-682

Malliaris A.G. and W.A. Brock, Stochastic Methods in Economics and Finance, North-Holland Press, 1982

Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," Bell Journal of Economics and

Management Science,28,1973, 141-183

Schuss Z. Theory and Applications of Stochastic Differential Equations, John Wiley & Sens Press, 1980.